HILFSBLATT

Partialbruchzerlegung

Gegeben sei eine rationale Funktion:

$$\boxed{f(z) := \frac{p(z)}{q(z)} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Zählerpolynom} \\ \leftarrow \text{Nennerpolynom} \end{array}} \quad 1$$

mit $\operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(q)$.

Vorgehensweise

1 Mit $n := \operatorname{grad}(q)$ gilt:

$$\boxed{f(z) = \frac{p(z)}{(z-z_1)^1 \cdot (z-z_2)^1 \cdot \ldots \cdot (z-z_n)^1}} \quad 2$$

mit $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, den Nullstellen des Nennerpolynoms.

Unter Berücksichtigung eventueller mehrfachen Nullstellen (Vielfachnullstellen) gilt folgende allgemeinere Form:

$$\boxed{f(z) = \frac{p(z)}{(z-z_1)^{i_1} \cdot (z-z_2)^{i_2} \cdot \ldots \cdot (z-z_m)^{i_k}}} \quad 3$$

$$\sum_{l=1}^{k} i_l = \operatorname{grad}(q) = n \overset{\geq}{\cancel{\leq}} m \qquad i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$$

im obigen Kasten waren alle i gleich 1, nur in diesem Fall gilt $m = n$.

② Zerlegung in Partialbrüche

→ 2 Beispiele

1. Beispiel

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

$$= \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

2. Beispiel

$$f(x) = \frac{3x}{x^2-2x+1}$$

$$= \frac{3x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{A}{(x-1)^2} + \underbrace{\frac{B}{x-1}}$$

ACHTUNG !!! Bei Vielfachnullstellen mehrere Partialbrüche - dabei Exponenten immer um 1 verringern bis dieser den Wert 1 hat

für

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^3}$$

folgt

$$= \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2}$$

③ Bestimmung der Koeffizienten

$A, B, C, \ldots \in \mathbb{C}$

I. die Koeffizienten der markierten Partialbrüche lassen sich über die sog. Zuhaltemethode bestimmen

1. Beispiel

$$A = \frac{x}{x+1}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{x}{\underbrace{(x-1)}(x+1)}$$

diesen Faktor ⊛ zuhalten und für x den Wert einsetzen der diesen zu NULL gemacht hätte

⊛ Nenner des „A-Partialbruchs"

analog für B:

$$B = \frac{x}{x-1}\Big|_{x=-1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$

$\boxed{\text{Probe}}$

$$= \frac{\frac{1}{2}(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{\frac{1}{2}(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x \cancel{+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x \cancel{-\frac{1}{2}}}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x}{x^2-1} = f(x) \quad \text{passt}$$

Anmerkung: Die PBZ ist Umkehrung des Zusammenfassens von Brüchen !!!

2. Beispiel

I. Bestimmung von A über Zuhalte-methode

$$\boxed{A = \frac{3x}{1}\Big|_{x=1} = 3}$$

II. Bestimmung der Koeffizienten mit verringerten Exponenten nur über Umformung möglich

Zur Bestimmung von B

$$\frac{3x}{(x-1)^2} = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3x-3}{(x-1)^2} = \frac{B}{x-1}$$

$$\frac{3\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{B}{x-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 3}$$

3. Beispiel (etwas komplexer)

$$f(z) = \frac{z^4 + 2z^2 - 4z + 1}{z^4 + 2z^2 + 1}$$

$$= 1 - \underbrace{\frac{4z}{(z^2+1)^2}}$$

$\mathrm{grad}(p) = \mathrm{grad}(q)$

$\Rightarrow$ erst Polynomdiv. oder SEHEN

PBZ

$$\tilde{f}(z) = \frac{4z}{(z^2+1)^2} = \frac{4z}{(z-j)^2(z+j)^2}$$

$$= \frac{A}{(z-j)^2} + \frac{B}{(z+j)^2} + \frac{C}{z-j} + \frac{D}{z+j}$$

$$A = \left.\frac{4z}{(z+j)^2}\right|_{z=j} = \frac{4j}{-4} = \underline{\underline{-j}}$$

$$B = \left.\frac{4z}{(z-j)^2}\right|_{z=-j} = \frac{-4j}{-4} = \underline{\underline{j}}$$

Anmerkung: $B = \overline{A}$

sind alle Koeffizienten des Zähler- und Nennerpolynoms reell, ist dies immer der Fall.

exakte Regel am Schluss

$$\Rightarrow \boxed{D = \bar{C}}$$

$$\underbrace{\frac{4z}{(z-j)^2(z+j)^2}} = \frac{-j}{(z-j)^2} + \frac{j}{(z+j)^2} + \frac{C}{z-j} + \frac{\bar{C}}{z+j}$$

$$'' = \frac{-j(z+j)^2 + j(z-j)^2}{(z-j)^2(z+j)^2} + \ldots$$

$$= \frac{\cancel{-jz^2} + 2z \cancel{+j} \cancel{+jz^2} + 2z \cancel{-j}}{(z-j)^2(z+j)^2} + \ldots$$

$$\cancel{\frac{4z}{(z-j)^2(z+j)^2}} = \cancel{\frac{4z}{(z-j)^2(z+j)^2}} + \frac{C}{z-j} + \frac{\bar{C}}{z+j}$$

$$0 = \frac{C}{z-j} + \frac{\bar{C}}{z+j}$$

$C = \bar{C} = 0$ liefert nicht nur eine richtige Möglichkeit

sondern

DIE RICHTIGE LÖSUNG

alle Koeffizienten sind eindeutig bestimmbar

REGEL:

$$\frac{A}{(z-c)^i} + \frac{\bar{A}}{(z-\bar{c})^i}$$