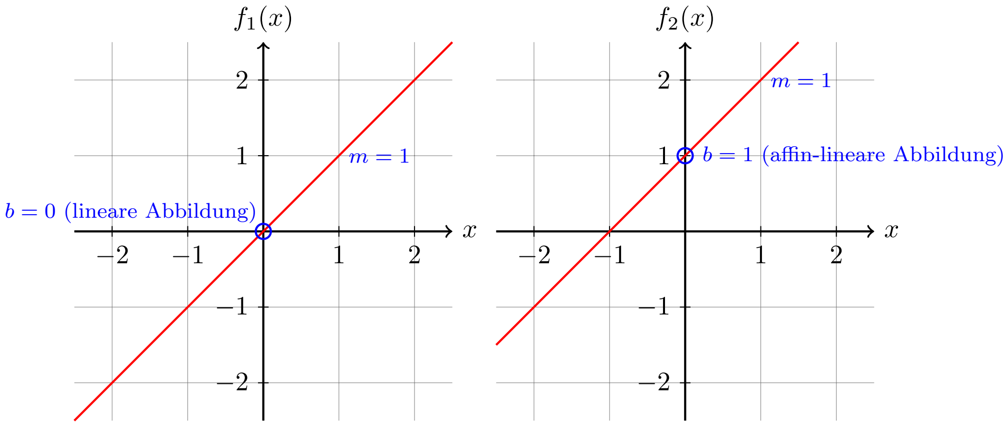
TUTORIUM Mathematik I, Lösungsvorschlag (Ü 1)

Aufgabe 1 ($f_1(x)$ und $f_2(x)$)

Fragestellung: Was erwarte ich? - Geradengleichung (Schule)

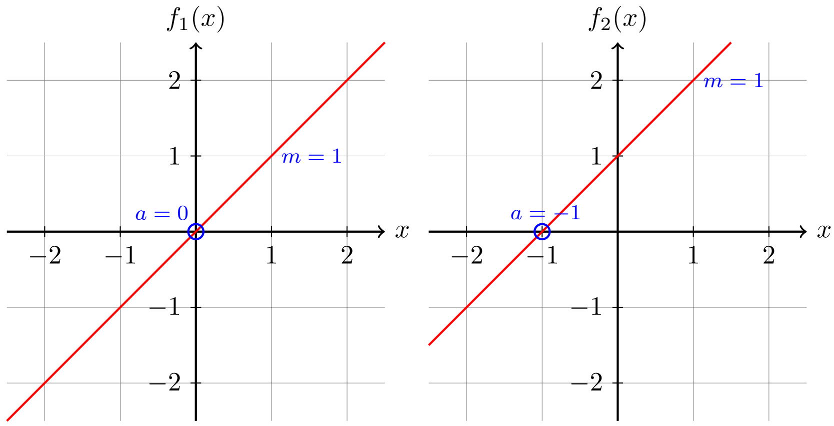
Mit Hilfe der bekannten Form $y = mx + b$ mit $m, b \in \mathbb{R}$ lassen sich die beiden Funktionen recht einfach skizzieren.



Die Steigung m und der y-Achsenabschnitt b können als charakteristische Größen zur Beschreibung der beiden Geraden angegeben werden. Außerdem kann zwischen linearen ($b = 0$) und affin-linearen Abbildungen ($b \neq 0$) unterschieden werden.

Andere Betrachtungsweise - Horizontale Verschiebung der Funktionen

Weiterhin fällt auf, dass die Funktion $f_2(x)$ sich nur durch eine horizontale Verschiebung (d.h. entlang der x-Achse) um "-1" von $f_1(x)$ unterscheidet.



Wir können also festhalten:

$$f_2(x) = f_1(x - \underbrace{(-1)}_{=:a}) \qquad \text{bzw.} \qquad f_{verschoben}(x) = f_{original}(x - a)$$

Diese Darstellung ist so gewählt, dass man die Verschiebung unmittelbar ablesen kann!

Mögliche Fragestellungen

(1) In welche Richtung würde die Funktion verschoben, wenn a positiv wäre?

(2) Eine lineare Abbildung $f_{original}(x)$ habe eine Steigung $m \neq 1$. Wie lautet allgemein der funktionale Zusammenhang $f_{verschoben}(x) = f_{original}(x, m, a)$, wenn sich die Funktion $f_{verschoben}(x)$ nur durch eine horizontale Verschiebung a von der Originalfunktion unterscheiden soll?

Surjektivität + Injektivität = Bijektivität

Um uns klar zu machen, welche Eigenschaften durch die beiden“Summanden der obigen Gleichung” beschrieben werden, betrachten wir im Folgenden die x-Achse als Input- und die $f(x)$-Achse als Outputachse der Abbildung. Erfüllt eine Funktion beide der nachfolgenden Kriterien, so ist diese automatisch bijektiv.

Surjektivität:	Zu jedem Outputwert muss mindestens ein Inputwert existieren.
Injektivität:	Zu jedem Outputwert darf höchstens ein Inputwert existieren.

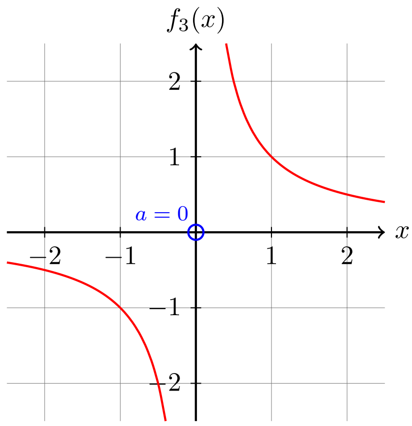
Was bedeutet dies für lineare Abbildungen?

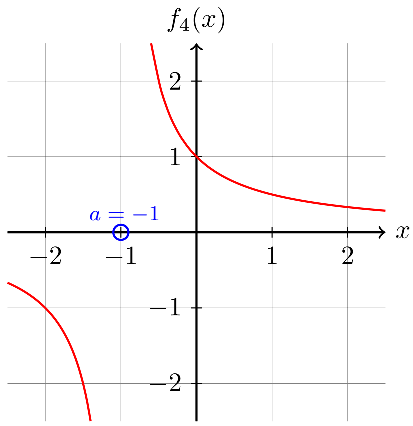
Aus der obigen Gesetzmäßigkeit folgt sofort, dass lineare Abbildungen $f : \mathbb{R} \to W$ mit $W \subseteq \mathbb{R}$ stets bijektiv sind. Somit sind die beiden Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ bijektiv.

Aufgabe 1 ($f_3(x)$ und $f_4(x)$)

Skizze der Funktionen

Da es sich bei $f_3(x)$ und $f_4(x)$ um Hyperbelfunktionen handelt (Schule), lassen sich die beiden Funktionen recht einfach skizzieren. Auch hier gilt $f_4(x) = f_3(x - (-1))$. Relativ zur Polstelle (=Nennernullstelle) unterscheidet sich der Funktionverlauf von $f_4(x)$ von dem der Funktion $f_3(x)$ in keinem Punkt.





Beide Funktionen sind nicht surjektiv, weil sowohl W_3 als auch W_4 den Outputwert 0 enthalten, dieser aber durch keinen der Inputwerte erzeugt werden kann. Die Bedingung “höchstens einen Inputwert je Outputwert” wird somit jedoch erfüllt, sodass beide Funktionen injektiv sind.

Mit $W'_{3,4} := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind beide Funktionen bijektiv!

Aufgabe 2 ($f_5(x)$)

Zerlegung der Funktion

Um Funktionen dieser Art (ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners) skizzieren zu können, sollte man zunächst versuchen diese in Teilfunktionen zu zerlegen, deren Verläufe man kennt. Zwar handelt es sich hier bereits um die Multiplikation der Funktionen $f_1(x)$ und $f_4(x)$, es empfiehlt sich jedoch, Funktionen (falls möglich) immer in eine Summe von bekannten Teilfunktionen zu überführen! Dies ist in diesem Beispiel auf zwei Wegen möglich:

<u>Polynomdivision</u>

$$\begin{array}{l} \big(\quad x\big) : \big(x+1\big) = 1 + \dfrac{-1}{x+1} \\ \underline{-\,x-1} \\ \quad -\,1 \end{array}$$

<u>Addition von 0</u>

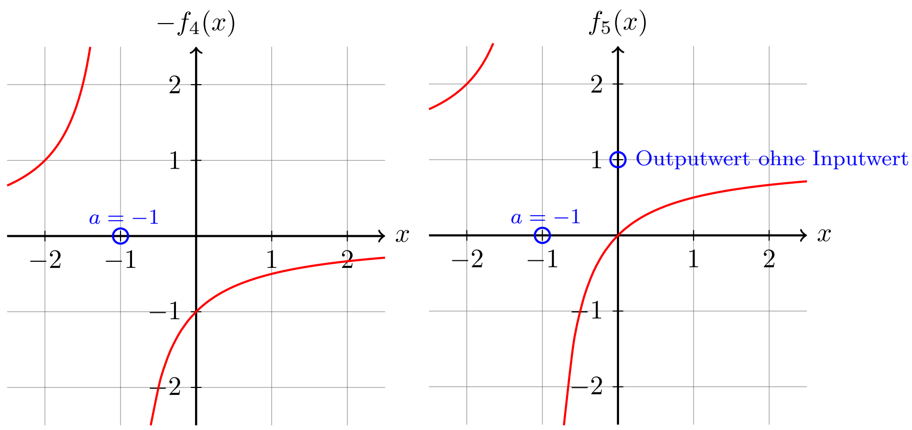
$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x} &= \frac{1+x-1}{1+x} \\ &= \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} \\ &= 1 - \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

Wir stellen also fest:

$$f_5(x) = -\underbrace{\frac{1}{1+x}}_{f_4(x)} + 1 = -f_4(x) + 1$$

Skizze der Funktion

Die erste der beiden Skizzen zeigt die Funktion $-f_4(x)$. Das "-1" bewirkt eine Spiegelung der bekannten Funktion $f_4(x)$ an der x-Achse. Verschiebt man die Funktion zusätzlich um "1" nach oben, erhält man schließlich die Funktion $f_5(x)$.



An der Skizze lässt sich sofort ablesen, dass die Funktion für $W_5' := \mathbb{R} \setminus \{1\}$ bijektiv wäre.

 Fragen & Anregungen an: info@mb-tut.de

Aufgabe 2 ($f_6(x)$)

Zerlegung der Funktion

Der Summand "$-x$" stellt bereits eine Teilfunktion mit bekanntem Verlauf dar. Aus diesem Grund betrachten wir zunächst nur $\tilde{f}_6(x) := \frac{x^2}{1+x}$. Und wieder führen (mindestens) zwei Wege zum Ziel:

<u>Polynomdivision</u>

$$\begin{array}{l}
(\quad x^2) : (x+1) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1} \\
\underline{-\,x^2 - x} \\
\qquad -\,x \\
\qquad \underline{\;\; x + 1} \\
\qquad\qquad 1
\end{array}$$

<u>Addition von 0</u>

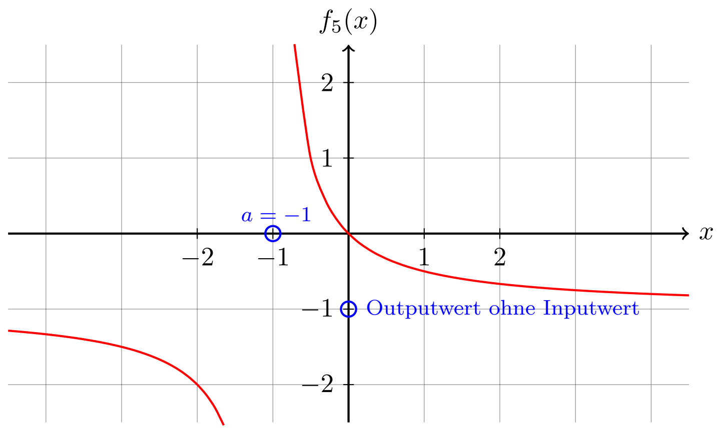
$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{1+x} &= \frac{1 + \overbrace{x^2 - 1}^{\text{3. binomische Formel}}}{1+x} \\
&= \frac{1}{1+x} + \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} \\
&= \frac{1}{1+x} + x - 1
\end{aligned}$$

Wir stellen also fest:

$$f_6(x) = \tilde{f}_6(x) - x = -1 + \frac{1}{1+x} + \cancel{x - x} = (-1) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)}_{f_5(x)}$$

Skizze der Funktion

Das Skizzieren des Funktionsverlaufs ist sofort möglich, denn aus obiger Zerlegung folgt: $f_6(x) = -f_5(x)$ ($\Rightarrow$ Spiegelung an der x-Achse)



Die Funktion wäre folglich für $W_6' := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ bijektiv.