TUTORIUM Mathematik I, Altklausuraufgabe 1

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 2 (Klausur SS00)

Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung sinnvoll?

$$y = \frac{(x+1)^2+2}{\underbrace{x^2+2x+1}_{\text{Binom: }(x+1)^2}+1} = \frac{\overbrace{(x+1)^2+1}^{\text{siehe Nenner}}+1}{\underbrace{(x+1)^2+1}_{\text{Nenner}}} = \underbrace{\frac{(x+1)^2+1}{(x+1)^2+1}}_{1} + \frac{1}{(x+1)^2+1} = \boxed{1 + \frac{1}{\underbrace{1+(x+1)^2}_{\neq 0}}}$$

Wie in den Aufgaben der Übungsbögen haben wir zunächst die Gleichung in eine Summe einfacherer Ausdrücke zerlegt.

Einschränkungen bezüglich der Inputvariablen x wären nur dann nötig, wenn einer der beiden Summanden "Ärger machen würde". Das einzig "ärgerliche" Ereignis, welches eintreten könnte, wäre eine Null im Nenner des zweiten Summanden. Da dieser jedoch stets echt größer Null ist, ist die die Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ sinnvoll.

Es besteht weiterhin "kein Grund zur Veranlassung" für y irgendwelche Werte außen vor zu lassen. Wir belassen es zunächst bei $y \in \mathbb{R}$.

Umstellung der Gleichung nach x

$$\begin{aligned}
y &= 1 + \frac{1}{1+(x+1)^2} \\
y - 1 &= \frac{1}{1+(x+1)^2} \\
\underbrace{1+(x+1)^2}_{\geq 1} &= \frac{1}{y-1} \qquad \boxed{y > 1} \\
(x+1)^2 &= \frac{1}{y-1} - 1 \\
|x+1| &= \sqrt{\underbrace{\frac{1}{y-1} - 1}_{\geq 0}} \qquad \boxed{y \leq 2}^{*} \\
x + 1 &= \pm\sqrt{\frac{1}{y-1} - 1} \\
x &= -1 \pm \sqrt{\frac{1}{y-1} - 1}
\end{aligned}$$

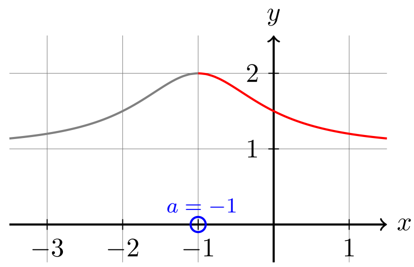
*Nebenrechnung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y-1} - 1 &\geq 0 \\
\frac{1}{y-1} &\geq 1 \\
1 &\geq y - 1 \qquad \boxed{y < 1} \\
2 &\geq y
\end{aligned}$$

Übergang: Gleichung → Funktion

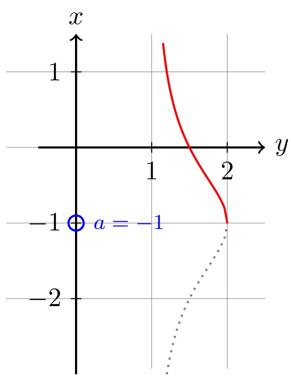
Die nachfolgende Skizze zeigt die Menge aller $(x, y) \in \mathbb{R}$ für die die Gleichung erfüllt ist.

Da $0 \in D$ sowie Injektivität gelten soll wählen wir $D := [-1|\infty)$. Somit zeigt der rot dargestellte Bereich die Funktion $f(x)$.



Surjektiv und damit bijektiv ist die Gleichung schließlich für $W := (1|2]$.

Umkehrfunktion



Die Funktionsvorschrift für $f^{-1} : W \to D$ lautet somit:

$$\boxed{x = f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{\frac{1}{y-1} - 1}}$$